

УДК 504.3

**С. М. ЮРАСОВ**, канд. техн. наук, доц., **О. А. АЛЕКСЕЄНКО***Одеський державний екологічний університет,*

ул. Львовская, Одесса, 1565016,

aandrew\_v@rambler.ru

**АПРОКСИМАЦІЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ ВОД  
НА ПРИКЛАДІ РІЧКИ ДНІСТЕР - М.БІЛЯЇВКА**

Виконано аналіз апроксимації часової змінюваності якості вод різними (нормальним, логнормальним, Вейбула і експоненціальним) законами розподілу на прикладі річки Дністер-м.Біляївка. Розраховані показники щільності апроксимації. Визначений оптимальний закон розподілу показників якості вод.

**Ключові слова:** показники якості вод, розподіл, логнормальний закон, закон Вейбула

**Urasov S. N., Alekseenko E. A. APPROXIMATION OF DISTRIBUTION FUNCTIONS OF WATER  
QUALITY INDEXES (DNISTER RIVER, BELIAEVKA CITY)**

Approximation of temporal variability of water quality indexes was analyzed by various distribution functions (normal, lognormal, Weibull and exponential) for Dnestr river Beliaevka city. Approximation density indexes were calculated. Optimal distribution function of water quality indexes was determined.

**Key words:** water quality indexes, distribution function, lognormal distribution function, Weibull distribution function

**Юрасов С. Н., Алексеенко Е. А. АППОКСИМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКА-  
ЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ВОД НА ПРИМЕРЕ РЕКИ ДНЕСТР – Г.БЕЛЯЕВКА**

Выполнен анализ аппроксимации временной изменчивости показателей качества вод различными (нормальным, логнормальным, Вейбулла и экспоненциальным) законами распределения на примере реки Днестр – г.Беляевка. Рассчитаны показатели плотности аппроксимации. Определен оптимальный закон распределения показателей качества вод.

**Ключевые слова:** показатели качества вод, распределение, логнормальный закон, закон Вейбулла

**Вступ**

**Постановка проблеми та її зв'язок із важливими практичними завданнями.** Водні ресурси залишаються одним з найдорогоцінніших ресурсів, яким коли-небудь володіло людство. Насамперед, це стосується прісної води, яку академік О. Ферсман назвав «найважливішим мінералом на Землі» [1]. Питна вода є базовим внутрішнім і зовнішнім середовищем людини. Тому забезпечення населення якісною питною водою виступає життєвоважливим національним інтересом будь-якої держави, у тому числі і України, що і обумовлює актуальність та важливість проблеми, що досліджується.

Визначення і аналіз законів розподілу показників якості вод, як випадкових величин, є невід'ємною частиною рішення проблеми вивчення просторово-часової мінливості стану водних об'єктів на різних рівнях.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В останній час багато уваги приділя

ється проблемам якості водного середовища, зокрема поверхневих водних об'єктів [2]. Дослідження цього напрямку переважно направлені на оцінку якості окремих водних об'єктів та пошук відповідних шляхів покращення їх екологічного стану [3, 4, 5, 6]. Однак не досить уваги приділяється аналізу закономірностей просторово-часової змінюваності показників якості вод. Це передбачає проведення відповідних досліджень [7], які розглядають у першу чергу фактори і закони за якими відбуваються зміни якості водного середовища. Це стало причиною вибору напряму даного дослідження, що базується на статистичній обробці та виявленні стохастичних закономірностей розподілу показників якості водного середовища.

**Мета роботи** є пошук оптимальної апроксимації законів розподілу показників якості вод на прикладі ріки Дністер-м.Біляївка.

### Матеріали і методи дослідження

У гідрологічних розрахунках, часто використовується поняття закон розподілу. Закон розподілу – встановлює певним чином зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їх ймовірностями [8].

Найбільш поширеними законами розподілу, які використовуються при практичних розрахунках, являються закони нормальний, логнормальний, експоненціальний і Вейбула:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})} \exp[-(x-\alpha')/(2\sigma^2)] dx \quad (1)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})} \exp[-(\ln x - \alpha')/(2\sigma^2)] dx \quad (2)$$

$$\Phi(x) = 1 - \exp[-x/\alpha']; \quad (3)$$

$$\Phi(x) = 1 - \exp[-(x/\alpha')^\beta]; \quad (4)$$

де  $\alpha'$  – математичне очікування;  
 $\sigma$  – середньоквадратичне відхилення;  $\beta$  – параметр розподілу.

Параметрами нормального, логнормального та експоненціального законів розподілу є математичне очікування та середньоквадратичне відхилення, що розраховуються по відомих формулах. Оцінка параметрів розподілу Вейбула більш складна. Розглянемо її.

Розподіл Вейбула є двопараметричним законом. Його можна представити в наступному вигляді (5):

$$P = \exp[-\alpha C^\beta]; \quad (5)$$

де  $P$  – забезпеченість (1- $\Phi$ ) випадкової величини  $C$ ;  $\alpha$  і  $\beta$  – параметри закону розподілу.

Знайти ці параметри можливо при статистичній обробці результатів спостережень. Для цього необхідно спочатку вирівняти вихідні дані (тобто привести нелінійну залежність до лінійного вигляду) (6):

$$P = \exp(-\alpha C^\beta) \rightarrow 1/P = \exp(\alpha C^\beta) \rightarrow \ln(1/P) = \alpha C^\beta \rightarrow \ln \ln(1/P) = \ln \alpha + \beta \ln C \rightarrow \{Y = \ln \ln(1/P); X = \ln C\} \rightarrow Y = \alpha^* + \beta X. \quad (6)$$

Методом найменших квадратів можливо знайти параметри отриманого рівняння регресії, вони будуть дорівнювати (7) і (8):

$$\beta = r_{xy} \sigma_y / \sigma_x, \quad (7)$$

$$\alpha^* = Y_{cp} - \beta X_{cp}, \quad (8)$$

де  $r_{xy}$  – коефіцієнт кореляції ряду  $X$  і ряду  $Y$ ;  $\sigma_y$  – середньоквадратичне відхилення ряду  $Y$ ;  $\sigma_x$  – середньоквадратичне відхилення ряду  $X$ ;  $Y_{cp}$  – середнє значення ряду  $Y$ ;  $X_{cp}$  – середнє значення ряду  $X$ .

Усі ці характеристики знаходять шляхом статистичної обробки результатів спостережень за формулами:

$$X_{cp} = (\sum X_i)/n; \quad Y_{cp} = (\sum Y_i)/n; \quad (9)$$

$$\sigma_x = [(\sum (X_i - X_{cp})^2)/(n-1)]^{0.5};$$

$$\sigma_y = [(\sum (Y_i - Y_{cp})^2)/(n-1)]^{0.5}; \quad (10)$$

$$r_{xy} = [\sum (Y_i - Y_{cp})(X_i - X_{cp})]/[(n-1) \sigma_y \sigma_x]. \quad (11)$$

Послідовність розрахунку наступна:

- члени ряду спостережень  $C_i$  ранжуються в убиваючому порядку и нумеруються;

- по номеру члена ряду розраховується забезпеченість по формулі (12):

$$P_i = i/(n+1), \quad (12)$$

де  $i$  – номер члена ранжируваного ряду;  $n$  – кількість членів ряду;

- по ряду  $P_i$  розраховується ряд  $Y_i = \ln \ln(1/P_i)$ , а по ряду  $C_i$  розраховується ряд  $X_i = \ln C_i$ ;

- для рядів  $Y$  і  $X$  розраховуються середні значення рядів, середньоквадратичне відхилення та коефіцієнт кореляції;

- по цим характеристикам розраховуються параметри  $\alpha^*$  і  $\beta$ ;

- розраховується параметр  $\alpha = \exp(\alpha^*)$ ;

- для кожного члена ряду  $P_i$  розраховується відповідне йому  $C_{prozi}$  по формулі (13):

$$C_{prozi} = [(1/\alpha) \ln(1/P_i)]^{1/\beta}; \quad (13)$$

- перевіряється точність апроксимації (14):

$$S = [(\sum (C_i - C_{prozi})^2)/n]^{0.5}, \quad (14)$$

$$S_n = S/C_{cp}, \quad (15)$$

де  $C_{cp}$  – середнє значення ряду спостережень.

Не важко відмітити, що формула (5) відрізняється від формули (4): параметр  $\alpha$  в цієї формулі відповідає  $(1/\alpha')^\beta$  у (4), де  $\alpha'$  є математичне очікування випадкової величини (у наших позначеннях –  $C_{cp}$ ). Тобто цей параметр можливо розраховувати по наступних формулах:  $\alpha = (1/C_{cp})^\beta$  або  $\alpha = \exp(\alpha^*)$ , де  $\alpha^*$  розраховується за формулою (8).

Визначимо далі параметри законів ро-

зподілу нормального, логнормального, експоненціального і Вейбула для показників якості вод ріки Дністер у районі м. Біляївка, та оцінимо щільність апроксимації емпіричних даних цими законами.

### Виклад основного матеріалу дослідження

У таблицях 1 і 2 представлені результати розрахунків параметрів законів розподілу, а також показник щільності апроксимації  $S_n$ .

Аналіз таблиці показує, що для значної більшості показників якості вод логно-

рмальний закон розподілу ліпше апроксимує результати спостережень ніж закон Вейбула: значення показника  $S_n$  (15) для цього закону менш ніж для закону Вейбула, крім таких показників як нітрати, алюміній, мідь та розчинений кисень.

Таблиця 1

Параметри логнормального закону розподілу і щільність зв'язку

№ п/п	Показник	Логнормальний		
		$(\ln C)_{cp}$	$\sigma(\ln C)$	$S/C_{cp}$
1	Натрій і калій	3,424	0,290	0,051
2	Залізо	-0,9806	0,521	0,090
3	Нітрити	-3,046	0,778	0,020
4	Нитрати	2,066	0,236	0,023
5	Сульфати	4,302	0,208	0,052
6	Хлориди	3,612	0,190	0,021
7	Алюміній	-3,061	0,595	0,159
8	Сухий залишок	5,961	0,150	0,019
9	Аміак	-1,289	0,395	0,113
10	Фториди	-1,325	0,387	0,129
11	Мідь	-1,507	0,740	0,190
12	Марганець	-2,850	0,720	0,307
13	Молібден	-5,202	0,117	0,023
14	Розчинний кисень	2,213	0,244	0,055
15	БПК <sub>20</sub>	1,223	0,316	0,062
16	ХПК	3,187	0,247	0,028
17	Нафтопродукти	-4,026	0,761	0,411

Апроксимація результатів спостережень за законом Вейбула (рис. 1) з використанням формули (5) більш щільна, ніж з використанням формули (4). Цей результат є закономірним, оскільки параметри формули (5) розраховані методом найменших квадратів. Тобто використання середнього значення ряду спостережень при розрахунку параметрів закону розподілу Вейбула приводить до більшої погрішності при апроксимації емпіричних даних.

Експоненціальний (рис. 2) і нормальний (рис. 3) закони розподілу не розглядаються, оскільки дослідження показали, що щільність зв'язку апроксимацій за цими законами гірше ніж за законами Вейбула і логнормальним.

Зробимо тепер останню перевірку: розрахуємо значення усіх показників якості вод з 10% забезпеченістю ( $C_{10}$ ) та порахуємо, скільки спостерігатиметься перевищень цих значень за результатами спостережень (табл. 3).

Таблиця 2

Параметри закону розподілу Вейбула і щільність зв'язку

№ п/п	Показник	Вейбула				
		$\beta$	$\alpha^*_1$	$S/C_{cp}$	$\alpha^*_2$	$S/C_{cp}$
1	Натрій і калій	4,000	-14,26	0,088	-13,86	0,131
2	Залізо	2,280	1,676	0,103	1,948	0,174
3	Нітриди	1,550	4,161	0,101	4,332	0,173
4	Нитрати	5,015	-10,92	<b>0,023</b>	0,051	0,099
5	Сульфати	5,506	-24,25	0,084	-23,81	0,115
6	Хлориди	6,188	-22,91	0,049	-22,46	0,087
7	Алюміній	2,003	5,572	<b>0,140</b>	5,792	0,159
8	Сухий залишок	7,811	-47,12	0,041	-46,64	0,072
9	Аміак	2,785	3,030	0,179	3,355	0,224
10	Фториди	2,854	3,222	0,185	3,572	0,220
11	Мідь	1,616	1,876	<b>0,075</b>	2,067	0,153
12	Марганець	1,648	4,135	0,438	4,242	0,433
13	Молібден	10,12	52,11	0,024	52,60	0,053
14	Розчинний кисень	4,807	-11,20	<b>0,048</b>	-10,78	0,099
15	БПК <sub>20</sub>	3,751	-5,148	0,088	-4,773	0,134
16	ХПК	4,822	-15,93	0,042	-15,51	0,097
17	Нафтопродукти	1,231	4,394	0,392	4,524	0,425

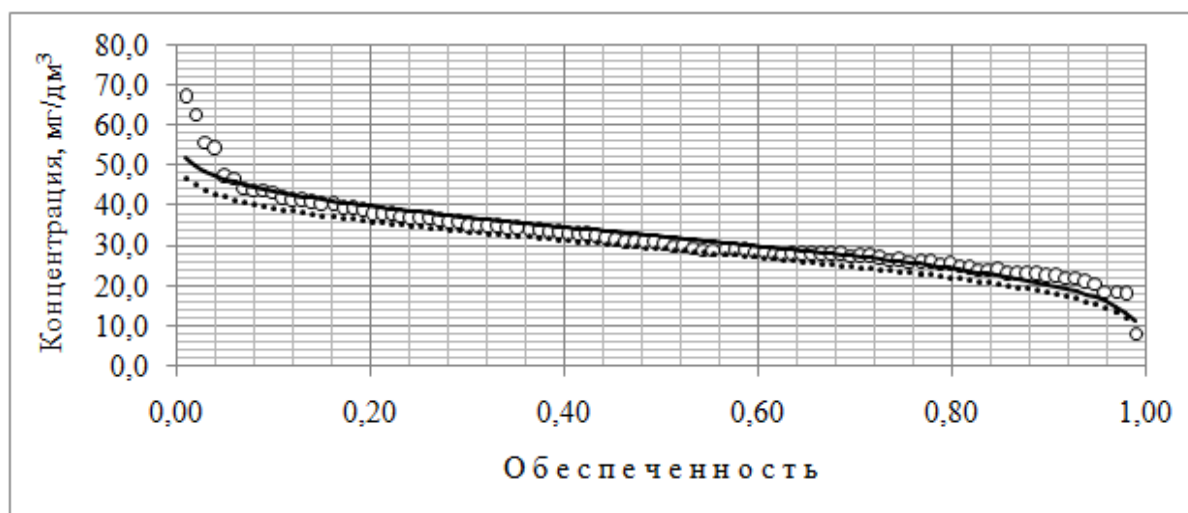


Рис. 1 – Апроксимация результатів спостережень законом Вейбула: безперервна лінія – формула (5); точкова – формула (4)

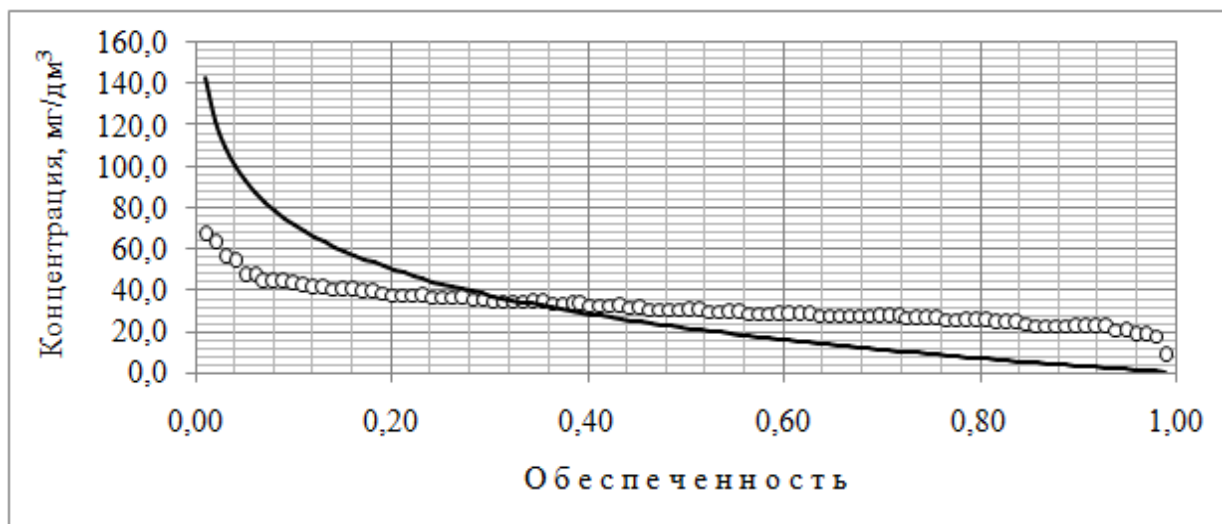


Рис. 2 – Апроксимація результатів спостережень (маркер круг) залежністю експоненціального виду (безперервна лінія)

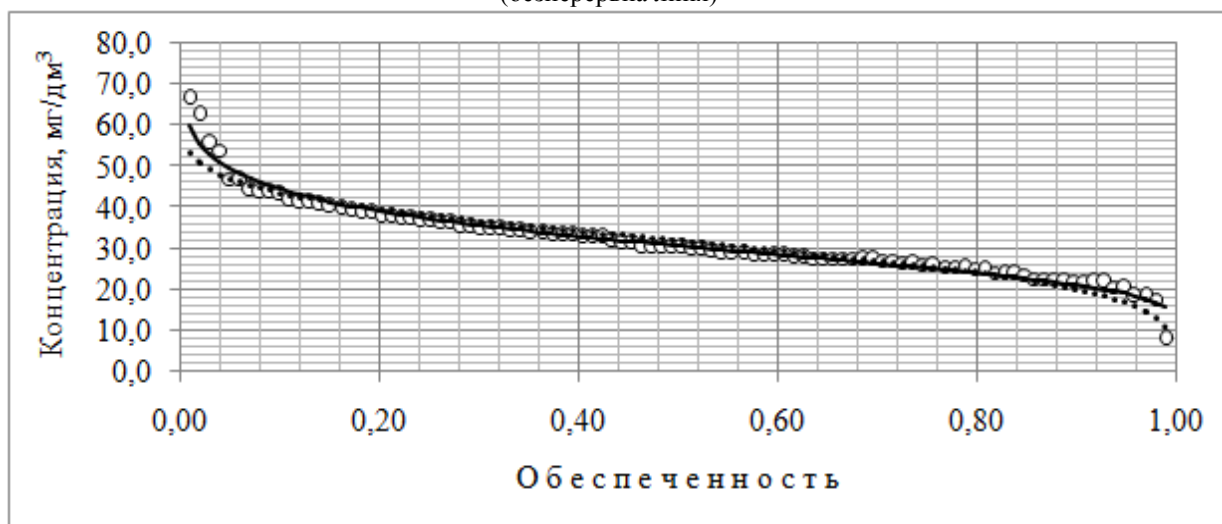


Рис. 3 – Апроксимація результатів спостережень логнормальним (безперервна лінія) і нормальним (точкова лінія) законами розподілу

Із таблиці 3 визначено, що обидва закони достатньо добре відображають розподіл крайніх членів ряду (значень ряду з малою забезпеченістю). Однак, розраховані за логнормальним законом  $C_{10}$  мають середню емпіричну забезпеченість рівну 9,9%, що практично збігається з забезпеченістю, яка

задана. За законом Вейбула емпірична забезпеченість дорівнює 11,5%. Це декілько більше. Тому, для характеристики розподілу значень показників якості вод річки Дністер ліпше використовувати логнормальний закон.

### Висновки

Проведені розрахунки надали можливість викреслити, що найбільш оптимальним законом, що може бути застосований для апроксимації переважної кількості показників якості вод (на прикладі річки Дністер), є логнормальний закон. Однак, для декількох показників, таких як нітрати, алюміній, мідь та розчинений кисень слід

застосовувати розподіл Вейбула. Таким чином, при розгляданні показників якості вод як випадкових величин, застосування вищезгаданих законів розподілу надасть можливість значно зменшити похибки отримання розрахункових значень, що може бути використано для подальшого прогнозу зміння якості водного середовища.

Таблиця 3

Вірогідність перевищення  $C_{10}$  за даними спостережень

№ п/п	Показник	Логнормальний				Вейбула			
		$C_{10}$ , мг/дм <sup>3</sup>	$n$	$N$	$n/N$ , %	$C_{10}$ , мг/дм <sup>3</sup>	$n$	$N$	$n/N$ , %
1	Натрій і калій	44,5	6	98	6,1	43,5	9	98	9,2
2	Залізо	0,731	7	98	7,1	0,691	8	98	8,2
3	Аміак	0,457	11	98	11,2	0,454	11	98	11,2
4	Нітрити	0,129	6	98	6,1	0,117	9	98	9,2
5	Нитрати	10,7	9	98	9,2	10,4	10	98	10,2
6	Сульфати	96,4	8	98	8,2	95,1	8	98	8,2
7	Хлориди	47,3	8	98	8,2	46,4	9	98	9,2
8	Алюміній	0,100	10	92	10,9	0,094	16	92	17,4
9	Сухий залишок	470	11	98	11,2	464	11	98	11,2
10	Фториди	0,436	9	98	9,2	0,433	9	98	9,2
11	Мідь	0,572	7	96	7,3	0,525	11	96	11,5
12	Марганець	0,145	11	69	15,9	0,135	12	69	17,4
13	Молібден	0,064	11	98	11,2	0,063	12	98	12,2
14	Розчинний кисень	5,54	1	98	1,0	6,13	4	98	4,1
15	БПК <sub>20</sub>	5,09	12	97	12,4	4,93	14	97	14,4
16	ХПК	33,2	9	98	9,2	32,3	14	98	14,3
17	Нафтопродукти	0,047	23	97	23,7	0,055	18	97	18,6
	Середнє значення				9,89				
	Стандартне відхилення ( $\sigma$ )				4,80				
	$\sigma/(n)^{0.5}$				1,16				
	Верхня межа 95% довірчого інтервалу				12,22				
	Нижня межа 95% довірчого інтервалу				7,56				

### Література

1. Ферсман А. Е. Геохимия. / А. Е. Ферсман. – М.: Академия наук СССР, 1959. – 224 с.
2. Фесенко О. Г. Стан поверхневих вод Полтавської області (2005–2011 рр.) / О. Г. Фесенко // Вісник Полтавської державної аграрної академії. – № 4 – 2013. – С 158-161.
3. Мосейчук А. А. Оцінка якості питної води в джерелах децентралізованого водопостачання Полтавської області / А. А. Мосейчук, І. А. Бойко. // Вісник Полтавської державної аграрної академії. – №4 – 2011. – С. 12-17.
4. Рідей Н. М. Екологічний контроль за якістю поверхневих водних джерел озер навчально-дослідного господарства «Великоснітинське» ім. Музиченка / Н. М. Рідей, І. В. Захаркевич. // Вісник Запорізького національного університету. – №2 – 2008. – С. 172-176.
5. Чобан А. Ф. Оцінка впливу стічних

- вод ТЕС на природні водні об'єкти / А. Ф. Чобан, С. Я. Чобан. // Екологія довкілля та безпека життєдіяльності – №4 – Чернівці: 2008. – С. 52-58
6. Степова О. В. Аналіз стану поверхневих вод Полтавської області в контрольних створах. / О. В. Степова, Р. В. Булаченко, В. В. Рома. // Вісник Полтавської державної аграрної академії. – № 1 – 2012. – С.181-184.
7. Ковальчук Л. А. Вероятностно - статистическое оценивание качества поверхностных вод по категориям / Л. А. Ковальчук, Н. Н. Осадчая, В. И. Осадчий. // Наук. праці УкрНДГМІ – №257 – К.: 2008. – С.162-175
8. Козлов М. В. Введение в математическую статистику. / М. В. Козлов, А. В. Прохоров. – М.:Изд-во МГУ, 1987. – 264 с.

Надійшла до редколегії 12.09.2014

